Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Wintersemester 2020/2021

Lineare Algebra I
Blatt 10
Abgabe: 08.02.2021, 10 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (20 Punkte)**.**

Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und eine Permutation σ in S_n ist die 2-elementige Menge $\{i, j\}$ ein *Fehlstand*, falls durch σ die Ordnung invertiert wird: d. h. $i < j$ aber $\sigma(i) > \sigma(j)$ (oder andersherum). Das *Vorzeichen* von σ wird definiert als

$$\operatorname{sign}(\sigma) = (-1_{\mathbb{K}})^{\text{Anzahl der Fehlstände von } \sigma}.$$

(a) Zeige für jede Permutation σ, dass σ und σ^{-1} dasselbe Vorzeichen besitzen.

(b) Sei $A = (a_{ij})$ eine Matrix aus $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Zeige, dass

$$\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{1\leq k\leq n} a_{k\sigma(k)} = 0_{\mathbb{K}},$$

falls zwei Zeilen von A identisch sind.

Hinweis: Seien die i-te und j-te Zeile von A identisch sowie $k \neq \ell$ gegeben. Wie unterscheiden sich die Vorzeichen zweier Permutationen σ und τ mit

$$\sigma(k) = i, \sigma(\ell) = j \text{ und } \tau(k) = j, \tau(\ell) = i,$$

sowie $\sigma(r) = \tau(r)$ für $r \neq k, \ell$?

(c) Schließe die Leibniz Formel für Determinanten:

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{1\leq k\leq n} a_{k\sigma(k)}.$$

Hinweis: Wie viele Determinantenfunktionen auf $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ gibt es?

(d) Zeige mit Hilfe der Leibniz Formel, dass

$$\mathrm{P}_A(T) = \det(T\,\mathbf{Id}_n - A) = \prod_{i=1}^{n}(T - a_{ii}) + Q(T)$$

für ein Polynom Q vom Grad $\leq n + 2$. Insbesondere ist P_A normiert.

(e) Beweise, dass für ähnliche Matrizen A und B stets $P_A = P_B$ gilt.

Hinweis: Beachte, dass $\mathbf{Id}_n = S^{-1}S$ für reguläre S.

(f) Die *Spur* der Matrix A ist $\operatorname{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Zeige, dass ähnliche Matrizen dieselbe Spur haben.

Hinweis: Was ist der Koeffizient von T^{n-1} in P_A?

(g) Rechne nach, dass $\operatorname{Spur}(A \cdot B) = \operatorname{Spur}(B \cdot A)$.

(h) Schreibe $P_A(T) = T^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k T^k$. Zeige, dass A genau dann regulär ist, wenn $b_0 \neq 0$.

Hinweis: Welcher Wert der Variable T liefert den konstanten Term von P_A?

Abgabe in ILIAS als eine einzige PDF-Datei einreichen.